LIBRIS We know books

Maria Zaharia
Dan Zaharia

5

GEOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

Capitolul I
NOŢIUNI DE BAZĂ ALE GEOMETRIEI

Lecţia 1. Punct, dreaptă, plan. Poziţiile relative ale punctelor şi dreptelor

Geometria este una dintre cele mai vechi științe. Cuvântul „geometrie” este de origine greacă: *geo* = „pământ”, *metron* = „măsură”, însemnând „măsurarea pământului”. Prin urmare, geometria a fost dezvoltată pentru a înțelege mai bine realitatea înconjurătoare.

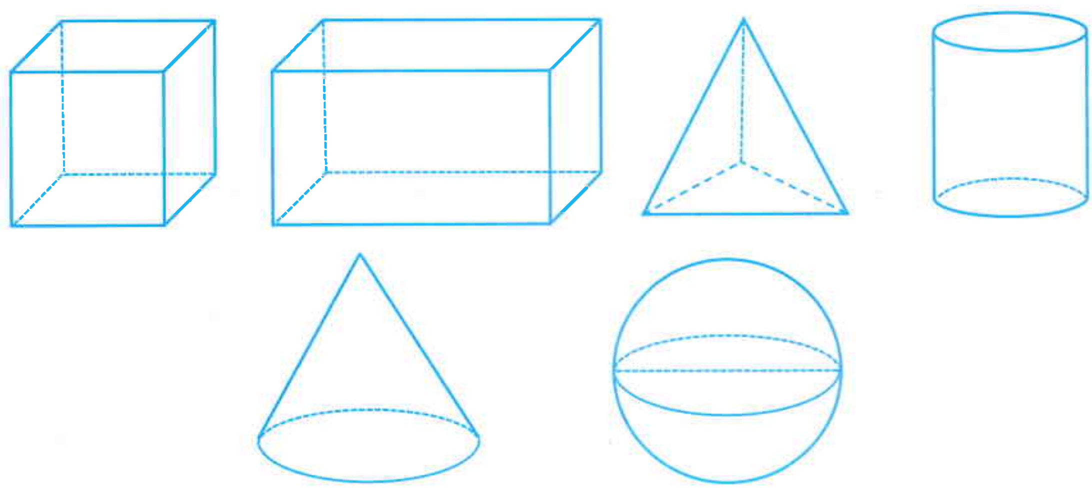
Reține!

- Cele mai simple **noțiuni geometrice** sunt: **punctul**, **dreapta** și **planul**. Aceste noțiuni, extrase din realitatea înconjurătoare prin observare directă, nu pot fi definite. De aceea le numim **noțiuni fundamentale**. În spațiul fizic în care trăim, noțiunile fundamentale le identificăm cu unele obiecte. Celelalte noțiuni geometrice sunt introduse prin definiții cu ajutorul noțiunilor fundamentale.

Exemple:
- **punctul** îl identificăm cu urma lăsată de un creion bine ascuțit pe o foaie de hârtie;
- **dreapta** o identificăm cu un fir de ață nesfârșit, perfect întins;
- **planul** îl identificăm cu fața unei mese, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile.

- Principalul mijloc de reprezentare a noțiunilor geometrice pe foaia caietului sau pe tabla clasei în care învățăm este desenul. Se obțin în acest fel **figuri geometrice**.
- Instrumentele folosite pentru desenarea figurilor geometrice sunt: **rigla** (gradată sau negradată), **compasul**, **echerul** și **raportorul**.

De exemplu, figurile geometrice desenate mai jos reprezintă următoarele noțiuni geometrice: *cub*, *paralelipiped dreptunghic*, *piramidă*, *cilindru*, *con*, *sferă*.



Ele au în realitatea înconjurătoare câte un corespondent care este un obiect (corp) al spațiului fizic în care trăim.

În geometrie, punctele se notează cu litere mari de tipar: A, B, C, ..., dreptele cu litere mici: a, b, c, ..., iar planele cu litere grecești: α, β, γ, ...[1]. Uneori aceste litere sunt însoțite de câte un indice inferior (exemple: A_1, d_2, α_3, ...[2]) sau de câte un indice superior (exemple: A', d'', α'', ...[3]).

Noțiunile *punct*, *dreaptă*, *plan* vor fi reprezentate în desen după cum urmează (figura 1):

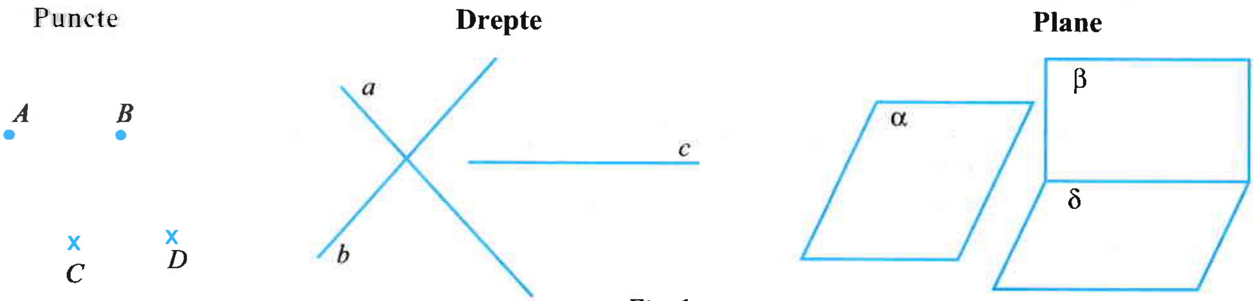


Fig. 1

Exemplu:

La un cub deosebim 8 vârfuri, 12 muchii și 6 fețe (figura 2). Fiecare vârf poate fi identificat cu un punct. Fiecare muchie prelungită la nesfârșit poate fi identificată cu o dreaptă și fiecare față, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile, poate fi identificată cu un plan. Cele opt vârfuri, fiind puncte, le notăm cu litere mari de tipar: patru dintre ele le notăm cu literele A, B, C, D, iar pe celelalte patru cu litere mari de tipar însoțite de indici superiori A', B', C', D' (figura 3). O muchie prelungită la nesfârșit, fiind o dreaptă, o putem nota cu o literă mică, de exemplu cu d, iar o față prelungită la nesfârșit în toate direcțiile, fiind un plan, o putem nota cu o literă grecească, de exemplu cu δ (delta).

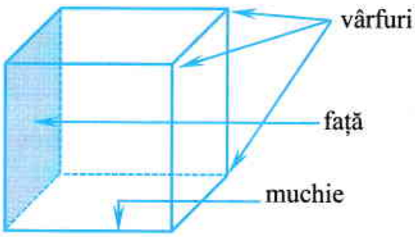


Fig. 2

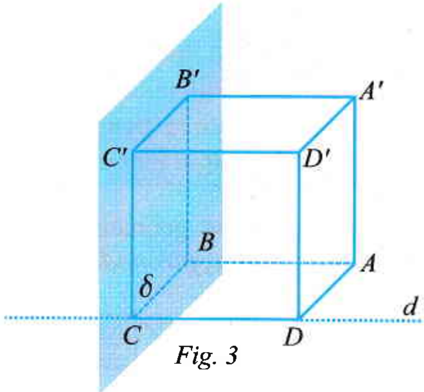


Fig. 3

Vom privi dreapta și planul ca mulțimi nesfârșite de puncte (figura 4.a și 4.b). *Orice figură geometrică este văzută ca o mulțime de puncte.* De exemplu, un triunghi este o mulțime de puncte (figura 4.c).

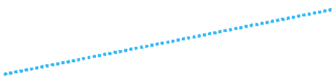


Fig. 4.a

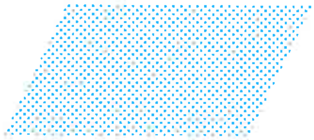


Fig. 4.b

Fig. 4.c

[1] Citim: *alfa, beta, gama.*

[2] Citim: *A unu, d doi, alfa trei.*

[3] Citim: *A prim, d secund, alfa secund.*

Pozițiile relative ale punctelor și dreptelor

Două puncte A și B pot fi *diferite* și notăm $A \neq B$ (figura 5.a) sau pot fi *identice* și notăm $A = B$ (figura 5.b).

Fig. 5.a

Fig. 5.b

Observație:

Ori de câte ori considerăm două (sau mai multe) puncte, presupunem că ele sunt diferite (două câte două).

În figura 6.a, punctul A este situat pe dreapta d. Se mai spune că *punctul A se află pe dreapta d* sau că *punctul A aparține dreptei d* și scriem $A \in d$. În figura 6.b, punctul A nu este situat pe dreapta d. Spunem că *punctul A nu se află pe dreapta d* sau că *punctul A nu aparține dreptei d* și scriem $A \notin d$.

Fig. 6.a

Fig. 6.b

Reține!

- Două puncte pot fi **diferite** sau pot **coincide** (sunt puncte **identice**).
- Un punct poate **aparține** unei drepte sau poate **să nu aparțină** acelei drepte.
- Despre un punct care nu aparține unei drepte se spune că este **punct exterior dreptei**.
- Oricare două puncte aparțin unei **singure drepte**.
- Trei sau mai multe puncte care aparțin aceleiași drepte se numesc **puncte coliniare**.

Observație:

În limbaj obișnuit, propoziția „oricare două puncte aparțin unei singure drepte” se formulează astfel: **prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una**. Dreapta care trece prin două puncte se desenează cu ajutorul riglei (figura 7). Dacă cele două puncte sunt A și B, atunci dreapta respectivă se numește *dreapta determinată de punctele A și B* și se notează cu AB.

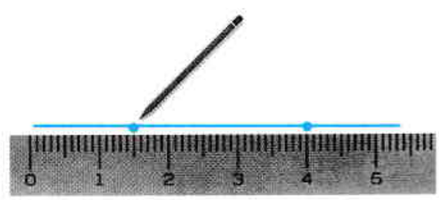


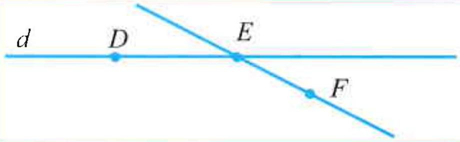
Fig. 7

Exemple:

1.

Citim	Desenăm	Notăm
punctele A și B sunt diferite	A • • B	$A \neq B$
punctele M și N sunt identice	M • N	$M = N$
dreapta determinată de două puncte P și Q	P —— Q	PQ
punctul M este exterior dreptei d	• M d ——	$M \notin d$

2.

Citim	Desenăm	Consecință
punctele A, B și C aparțin unei drepte d		punctele A, C, B sunt coliniare
dreptele DE și EF nu coincid		punctele D, E, F nu sunt coliniare

3. Privește cu atenție figura 8.

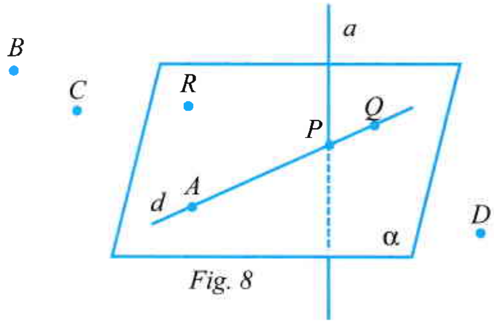


Fig. 8

Observăm	Folosim o exprimare cu același înțeles (exprimare sinonimă)	Notăm
punctul A este situat pe dreapta d	punctul A *aparține* dreptei d	$A \in d$
punctele A, P și Q sunt pe dreapta d	punctele A, P și Q *aparțin* dreptei d	$A, P, Q \in d$
punctul R nu este situat pe dreapta d	punctul R *nu aparține* dreptei d (*punctul R este exterior dreptei d*)	$R \notin d$
punctele B, C, D și R nu sunt situate pe dreapta d	punctele B, C, D și R *nu aparțin* dreptei d (*sunt puncte exterioare dreptei d*)	$B, C, D, R \notin d$
punctul B nu este situat în planul α	punctul B *nu aparține* planului α (*punctul B este exterior planului α*)	$B \notin \alpha$
punctul R este situat în planul α	punctul R *aparține* planului α	$R \in \alpha$
punctele A, P și Q sunt puncte ale planului α	punctele A, P și Q *aparțin* planului α	$A, P, Q \in \alpha$
punctele B, C și D nu sunt puncte ale planului α	punctele B, C și D *nu aparțin* planului α (punctele B, C și D sunt *exterioare* planului α)	$B, C, D \notin \alpha$
dreapta d este în planul α	dreapta d este *inclusă* (conținută) în planul α	$d \subset \alpha$
dreapta a nu este în planul α	dreapta a *nu este inclusă* (conținută) în planul α	$a \not\subset \alpha$

Descoperim noțiuni noi

Pentru aceasta, să observăm cubul din figura 9, ale cărui vârfuri se identifică cu punctele A, B, C, D, A', B', C', D'.

Oricare două dintre aceste puncte determină o dreaptă. De exemplu: punctele A și B determină dreapta AB; punctele C și D determină dreapta CD etc.

Oricare față a cubului, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile, poate fi identificată cu un plan sau *determină* un plan. De exemplu, fața cubului în care se află punctele A, B, C, D determină planul α; fața cubului în care se află punctele C, B, B' și C' determină un plan β etc.

Observăm că dreapta AB *se află* în planul α. Se mai spune că dreapta AB *este conținută* în planul α sau că dreapta AB *este inclusă* în planul α, se scrie $AB \subset \alpha$ și citim „AB inclusă în α”.

În contextul de mai sus, privind cu atenție figura 9, deducem că există drepte care se află în același plan, numite *drepte coplanare*, și drepte care se află în plane distincte, numite *drepte necoplanare*. De asemenea, există drepte care au un punct comun și există drepte care nu au puncte comune.

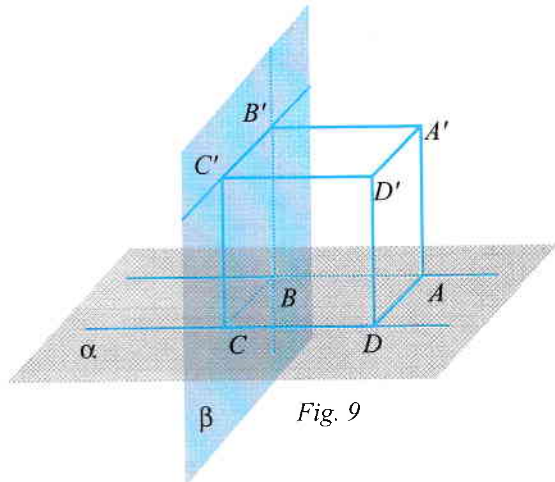


Fig. 9

Reține!

- Două sau mai multe drepte conținute în același plan se numesc **drepte coplanare**.
- Două drepte care nu sunt conținute în același plan se numesc **drepte necoplanare**.
- Două sau mai multe drepte care au punct comun se numesc **drepte concurente**. Orice două drepte concurente sunt drepte coplanare.
- Despre punctul comun dreptelor concurente se spune că este **punctul de intersecție** sau **punctul de concurență** a acestora.
- Două drepte necoplanare nu pot fi concurente (nu pot avea un punct comun).
- Două drepte coplanare care nu au niciun punct comun se numesc **drepte paralele**. Dacă a și b sunt două drepte paralele notăm $a \parallel b$, iar dacă nu sunt paralele notăm $a \nparallel b$.

Exemple (figura 9):

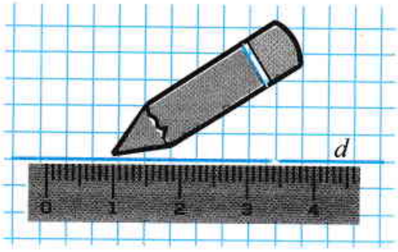
Observăm	Folosim o exprimare sinonimă	Reformulăm ceea ce observăm
dreptele AB, BC, CD sunt în planul α	dreptele AB, BC, CD sunt coplanare	$AB, BC, CD \subset \alpha$
dreptele AB și $B'C'$ nu pot avea niciun punct comun și sunt în planele diferite α, respectiv β	dreptele AB și $B'C'$ sunt necoplanare	dreptele AB și $B'C'$ nu se intersectează, $AB \subset \alpha$, $B'C' \subset \beta$, $\alpha \neq \beta$
dreptele AB, BC, $B'B$ au punctul B comun	dreptele AB, BC, $B'B$ sunt concurente (se intersectează)	punctul B este punctul de intersecție a dreptelor AB, BC și $B'B$
dreptele AB și CD sunt în același plan și nu au niciun punct comun	dreptele AB și BC sunt coplanare și nu se intersectează (dreptele AB și CD sunt paralele)	$AB \parallel CD$

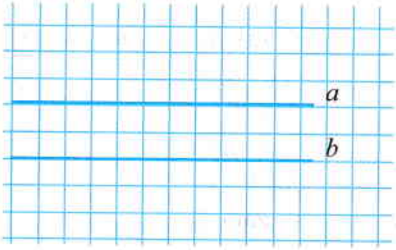
Desenul are un rol însemnat în geometrie. El contribuie la dezvoltarea intuiției spațiale, a imaginației, creativității, inventivității. Prin urmare, un desen trebuie făcut cu multă grijă. Pentru realizarea unui desen în condiții optime este necesar să se cunoască bine instrumentele de desen și modul lor de folosire. Principalele instrumente folosite pentru executarea desenului geometric sunt: *creionul*, *rigla*, *echerul*, *raportorul* și *compasul*.

Pentru trasarea dreptelor vom folosi rigla sau echerul și se cer respectate următoarele reguli:

- creionul să fie bine ascuțit;
- la trasarea dreptelor, vârful creionului se va sprijini în permanență pe muchia riglei (echerului) și se cere să fie înclinat față de direcția de trasare;
- trasarea dreptei se face, de regulă, de la stânga la dreapta și de sus în jos.

Pe foaia caietului de matematică, folosind creionul și o riglă, putem desena o dreaptă *d* peste o linie orizontală a liniaturii specifice caietului de matematică. Pentru aceasta, procedăm așa cum se arată mai jos, în imaginea din stânga.





Cum construim două drepte paralele?

Peste două linii orizontale oarecare ale liniaturii specifice unei foi de matematică desenăm două drepte *a* și *b*, așa cum se arată mai sus în imaginea din dreapta. Cele două drepte *a* și *b* sunt coplanare (sunt desenate în planul reprezentat de foaia caietului). Prelungite imaginar la stânga și la dreapta, dreptele respective nu au niciun punct comun (nu se intersectează). Prin urmare, dreptele *a* și *b* sunt paralele.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

a) Două drepte concurente sunt coplanare. A F

b) Două drepte paralele nu sunt coplanare. A F

c) Două drepte care nu au niciun punct comun sunt drepte paralele. A F

d) Două drepte care au un punct comun sunt drepte paralele. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Elementele figurii 10 sunt trei puncte *A*, *B*, *C* și două drepte *a* și *b*.

A. Punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare.

B. Dreptele *AB* și *BC* nu sunt drepte concurente.

C. Dreptele *a* și *AB* coincid.

D. Punctul *C* aparține dreptei *a*.

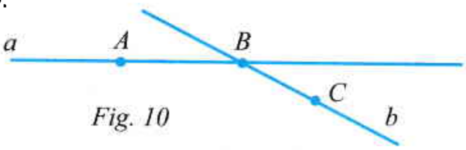


Fig. 10

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Dacă punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt coliniare, atunci dreapta determinată de câte două dintre ele poate fi numită în:

A. patru moduri; B. cinci moduri; C. șase moduri; D. șapte moduri.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

Figura 11 reprezintă un cub. Atunci:

a) dreptele *AB* și *MN* sunt

b) dreptele *AB* și *BN* sunt

c) dreptele *AB* și *PN* sunt

1) concurente și necoplanare;

2) paralele;

3) paralele și necoplanare;

4) concurente;

5) necoplanare.

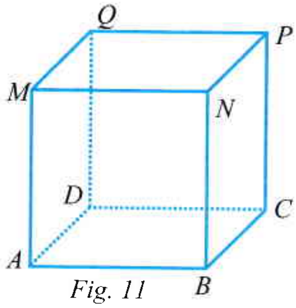


Fig. 11

5. **Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**
Trei sau mai multe puncte care aparțin aceleiași drepte se numesc puncte ....

FIXEAZĂ!

6. Figura 12 pune în evidență un plan, două drepte și trei puncte.
   a) Folosind rigla și creionul, desenează figura în caietul tău pe foaia cu pătrățele (figura din caietul tău este corect desenată dacă este identică cu figura 12).
   b) Notează elementele figurii (planul, dreptele și punctele) folosind notații corespunzătoare pentru plan, drepte și puncte.

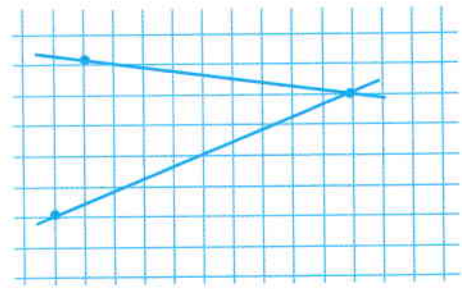


Fig. 12

7. a) Desenează două puncte M și N, apoi dreapta a, determinată de cele două puncte.
   b) Dacă P și Q sunt două puncte, astfel încât punctele M, N, P și Q sunt coliniare și diferite două câte două, iar b este dreapta determinată de punctele P și Q, arată că dreptele a și b coincid.

8. a) Folosind rigla și creionul, desenează în caietul tău, pe foaia cu pătrățele, trei drepte a, b și c, astfel încât dreptele a și b să fie paralele, iar dreptele b și c să fie concurente.
   b) Apreciază care din următoarele propoziții este :
      1) dreptele a și c sunt paralele;
      2) dreptele a și c sunt concurente.

FII CAMPION!

9. Se consideră cinci puncte coplanare A, B, C, D, E. Calculează **numărul dreptelor care conțin cel puțin** două dintre cele cinci puncte, știind că:
   a) oricare trei dintre cele cinci puncte sunt necoliniare;
   b) oricare trei dintre cele cinci puncte sunt coliniare.

10. a) Desenează și descrie pozițiile a patru drepte coplanare a, b, c, d, care îndeplinesc simultan următoarele condiții:
      1) punctul O este comun dreptelor concurente a și b;
      2) $b \parallel c$;
      3) punctul de intersecție a dreptelor a și b este identic cu punctul de intersecție a dreptelor b și d.
   b) În planul reprezentat de foaia caietului, desenează două drepte diferite, astfel încât dacă pe una o notezi cu MN, pe cealaltă să o poți nota cu NP.

Lecția 2. Distanța dintre două puncte. Segment, lungimea unui segment. Semidreaptă. Semiplan

În lumea reală, folosind un instrument de măsură și alegând convenabil o unitate de măsură, putem măsura distanța dintre două obiecte.

Exemplu (figura 1):

Pentru a măsura distanța dintre punctele A și B din figura 1, folosim o riglă gradată.

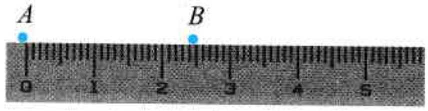


Fig. 1

Citim	Notăm
distanța dintre punctele A și B este egală cu 2,5 cm	$AB = 2{,}5$ cm

Descoperim noțiuni noi

Considerăm două puncte A și B (figura 2). Spunem că ***un punct M este situat între punctele A și B*** dacă:

(1) punctul M este diferit de punctele A și B;
(2) punctele A, M și B sunt coliniare;
(3) $AB = AM + MB$, adică distanța AB este egală cu suma distanțelor AM și MB.

Fig. 2

În acest caz spunem că:

– punctele A și B sunt *puncte situate de o parte și de alta* a punctului M;
– punctele M și B sunt *puncte situate de aceeași parte* a punctului A;
– punctele M și A sunt *puncte situate de aceeași parte* a punctului B.

Suntem acum în măsură să lămurim, prin formulări precise numite *definiții*, noțiunile geometrice: *segment* și *semidreaptă*.

Reține!

- Se numește **segment determinat de două puncte A și B** figura geometrică formată din toate punctele situate între A și B (figura 3).

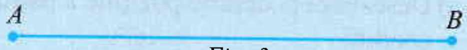


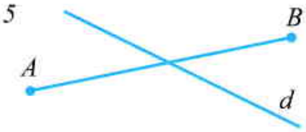
Fig. 3

- Distanța dintre punctele A și B se numește **lungimea segmentului AB**.
- Se numește **semidreaptă cu originea în A și căreia îi aparține punctul B**, figura geometrică formată din punctul B și toate punctele situate cu punctul B de aceeași parte a lui A (figura 4).

Fig. 4

Să lămurim noțiunea de *semiplan*. Pentru aceasta:

- considerăm un plan α. În planul α considerăm o dreaptă d și două puncte A și B care nu aparțin dreptei d.
- spunem că *punctul A este situat cu punctul B de o parte și de alta a dreptei d* dacă segmentul determinat de punctele A și B și dreapta d au un punct comun (figura 5).

Fig. 5


- spunem că *punctul A este situat cu punctul B de aceeași parte a dreptei d* dacă segmentul determinat de punctele A și B și dreapta d nu au puncte comune (figura 6).

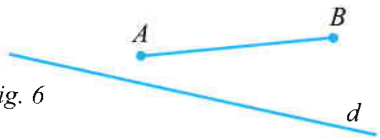


Fig. 6

Reține!

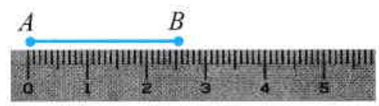
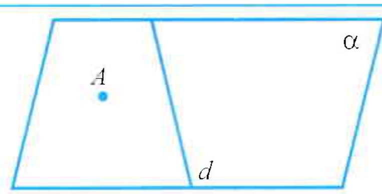
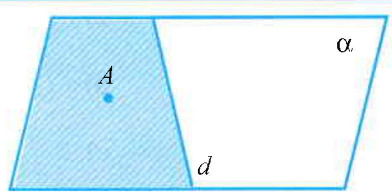
- Considerăm un plan α. În planul α considerăm o dreaptă *d* și un punct *A* care nu aparține dreptei. Se numește **semiplan determinat de dreapta *d* și punctul *A*** mulțimea ale cărei elemente sunt punctul *A*, punctele dreptei *d* și punctele situate cu *A* de aceeași parte a dreptei *d*.
- Dreapta *d* se numește **frontiera semiplanului**.
- Două semidrepte cu originea comună, a căror reuniune este o dreaptă, se numesc **semidrepte opuse**.
- Două semiplane cu frontiera comună, a căror reuniune este un plan, se numesc **semiplane opuse**.

Observație:

Este absolut necesar să folosim corect noțiunile definite anterior.

Exemple:

1.

Citim	Desenăm	Notăm
două puncte *A* și *B*		*A* și *B*
segmentul determinat de punctele *A* și *B*		AB
lungimea segmentului AB este egală cu 2,5 cm		$AB = 2{,}5$ cm
dreapta determinată de punctele *A* și *B*		AB sau BA
semidreapta cu originea în *A* căreia îi aparține punctul *B*		AB
semidreapta cu originea în *B* căreia îi aparține punctul *A*		BA
considerăm: un plan α, o dreaptă *d* inclusă în plan și un punct *A* al planului, exterior dreptei		$d \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin d$
semiplanul determinat de o dreaptă *d* și punctul *A* exterior dreptei		dA